Adı Soyadı:
Numarası:
İmza:

1	2	3	4	Toplam

30.05.2022

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV 2. QUİZ SORULARI

1) $f(x,y)=y^3+x^2-6xy+4y-5$ fonksiyonu ve $P=(-1,1),Q=(3,2)$ noktaları verilsin. Ortalama Değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

2)

$$3x+2y+z^2+u+v^2=0$$
$$4x+3y+z+u^2+v+w+2=0$$
$$x+y+w+u^2+2=0$$

denklem sistemi $(x,y,z,u,v,w)=(0,0,0,0,0,-2)$ noktası komşuluğunda u,v,w; x,y,z cinsinden çözülebilir mi? Neden?

3) $x-az=g(y-bz)$ denklemi ile kapalı olarak verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonu için

$$a.\frac{\partial z}{\partial x}+b.\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

olduğunu gösteriniz.

4) $f(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+4xy$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlıdır. Süre 45 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

1) $f(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 4y - 5$ fonksiyonu ve $P=(-1,1)$, $Q=(3,2)$ noktaları verilsin. Ortalama Değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

Çözüm: Aranan c noktası; $0 < t_0 < 1$ olmak üzere

$$c = (1-t_0).P + t_0.Q = (1-t_0).(-1,1) + t_0.(3,2) = (4t_0-1, 1+t_0)$$

olup, Ortalama Değer teoreminden dolayı

$$f(Q) - f(P) = Df(c).(Q-P)$$

yazılır.

$$f_x(x,y) = 2x - 6y$$

$$f_y(x,y) = 3y^2 - 6x + 4$$

olduğundan

$$f_x(c) = f_x(4t_0-1, 1+t_0) = 2(4t_0-1) - 6(1+t_0) = 2t_0 - 8$$

$$f_y(c) = f_y(4t_0-1, 1+t_0) = 3(1+t_0)^2 - 6(4t_0-1) + 4$$

$$= 3t_0^2 - 18t_0 + 13$$

bulunur. Böylece

$$f(3,2) - f(-1,1) = (f_x(c), f_y(c))\,((3,2)-(-1,1))$$

$$-16 - 7 = (2t_0 - 8,\ 3t_0^2 - 18t_0 + 13)\,(4,1)$$

$$-23 = 8t_0 - 32 + 3t_0^2 - 18t_0 + 13$$

$$-23 = 3t_0^2 - 10t_0 - 19 \Rightarrow 3t_0^2 - 10t_0 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 10^2 - 4.3.4 = 52$$

$$t_0 = \frac{10 \mp \sqrt{52}}{6}$$

$$\frac{10+\sqrt{52}}{6} \notin (0,1) \qquad \frac{10-\sqrt{52}}{6} = \frac{5-\sqrt{13}}{3} \in (0,1)$$

$$c = \left(4.\frac{5-\sqrt{13}}{3} - 1,\ 1 + \frac{5-\sqrt{13}}{3}\right) = \left(\frac{17-4\sqrt{13}}{3}, \frac{8-\sqrt{13}}{3}\right)$$

Çözüm 2. $\left.\dfrac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)}\right|_{P_0} = 1 \neq 0$ olduğundan

u, v, w ; x, y, z ye göre çözülebilir.

Çözüm 3. $F(x,y,z) = x - az - g(y - bz) = 0$

$z = f(x,y)$ olarak yazılabilmesi için $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ olmalı.

$\dfrac{\partial F}{\partial z} = -a + b\dfrac{\partial g}{\partial t} \neq 0$ olmalı.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{-a+bg'(t)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{-g'(t)}{-a+bg'(t)}$$

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{-1}{-a+bg'(t)} + b \cdot \frac{g'(t)}{-a+bg'(t)}$$

$$= \frac{-a+bg'(t)}{-a+bg'(t)} = 1$$

4) $f(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + 4xy$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f_x(x,y) = -\frac{2}{x^2} + 4y = 0 \Rightarrow 4y = \frac{2}{x^2} \Rightarrow 2yx^2 = 1$

$f_y(x,y) = -\frac{1}{y^2} + 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{1}{y^2} \Rightarrow 4xy^2 = 1$

$2yx^2 = 4xy^2 \Rightarrow yx^2 - 2xy^2 = 0$

$\Rightarrow xy(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{x=0}_{\text{Fonk. tanımlı değil}}$ veya $\underbrace{y=0}_{\text{Fonk. tanımlı değil}}$ veya $x=2y$

$x = 2y \Rightarrow 4\cdot 2y\cdot y^2 = 1 \Rightarrow y^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$x = 1$

$(1, \frac{1}{2})$ Kritik Nokta

$f_{xx}(x,y) = \frac{4}{x^3} \Rightarrow f_{xx}(1,\frac{1}{2}) = 4$

$f_{xy}(x,y) = 4 \Rightarrow f_{xy}(1,\frac{1}{2}) = 4$

$f_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3} \Rightarrow f_{yy}(1,\frac{1}{2}) = 16$

$\Rightarrow \Delta = 4^2 - 4.16$

$\Delta = -48$

$\Delta < 0$

$f_{xx}(1,\frac{1}{2}) = 4 > 0$

$\Rightarrow (1,\frac{1}{2})$ yerel minimum nokta